ある重み付き次数付環が UFD であることの証明

りす.

2018 年 12 月 14 日

一般に UFD(Unique Factorization Domain, 素元分解環) は素元分解ができ非常に性質がよい. しかしながら一方で与えられた整域が UFD であるかどうかの判定は非常に難しいことが知られている. そこでこの pdf で UFD 上の多項式環を重み付き次数付環とみなしたとき, ある条件を満たす斉重多項式で割った環が UFD になることを示す. ちなみにこの pdf は大体 [3] と [2] による.

定義 1. A をネーター整閉整域とし, 高さ 1 の素イデアル全体を $\mathrm{Ht1}(A)$ とする.

$\mathrm{Ht1}(A)$ で生成する $\mathbb{Z}$ 上の自由加群を $\mathrm{Div}(A)$ と書き, A の因子群という. $\mathrm{Div}(A)$ の元として $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ht1}(A)$ に対応する元を $[\mathfrak{p}]$ と書く. 任意の A の分数イデアル $I \neq (0)$ に対して $\mathrm{div}(I) \in \mathrm{Div}(A)$ を $\mathrm{div}(I) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ht1}(A)} \nu_{\mathfrak{p}}(I)[\mathfrak{p}]$ で定義する. ただし $\nu_{\mathfrak{p}} \colon \mathrm{Frac}(A) \to \mathbb{Z}$ を素イデアル $\mathfrak{p}$ に対応する離散付値とし, $\nu_{\mathfrak{p}}(I) := \min\{\nu_{\mathfrak{p}}(x); x \in I\}$ とする. $\mathrm{P}(A) = \{\mathrm{div}(fA); f \in \mathrm{Frac}(A) \setminus \{0\}\}$ とする. $\mathrm{Cl}(A) := \mathrm{Div}(A)/\mathrm{P}(A)$ を因子類群という.

命題 1. A をネーター整域であるとする. A が UFD であることと, A が整閉で $\mathrm{Cl}(A) = 0$ であることは同値である.

証明. A が UFD であるとする. 整閉であることを示す. $a, b \in A$ で a と b は素元分解に共通の素元を持たず, a/b が A 上整であるとする. $f(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n \quad (c_i \in A)$ を $f(a/b) = 0$ となる次数が最小の多項式とする. $a^n = -b(c_1 a^{n-1} + \cdots + c_n b^{n-1}) \in A$ となり, a と b は共通の素元を持たないため b は A における単元になり, $a/b \in A$ がわかる.

$f(t)$ は因子類群が自明であることを示す. 任意の有限集合 $S \subset \mathrm{Ht1}(A)$ と $n_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z} \quad (\mathfrak{p} \in S)$ に対して $\sum_{\mathfrak{p} \in S} n_{\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}]$ は $I = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}$ とすることで $\mathrm{div}(I)$ とあらわすことができる. したがって各高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ が単項生成であることを示せばよい. 0 でない $\mathfrak{p}$ の元 a は $a = p_1 \cdots p_m$ と素元の積に分解できる. $\mathfrak{p}$ は素イデアルであるため, ある i について $p_i \in \mathfrak{p}$ となる. このとき $(0) \subsetneqq (p_i) \subset \mathfrak{p}$ で, $\mathfrak{p}$ が高さ 1 であることから $(p_i) = \mathfrak{p}$. よって $\mathfrak{p}$ は単項イデアルである.

整閉で $\mathrm{Cl}(A) = 0$ なら $a \in A$ が素元の積に分解できることを示す. $\mathrm{Cl}(A) = 0$ より任意の高さ 1 の素イデアルは単項である. $a \in A$ を単元でも 0 でもないとする. Krull の単項イデアル定理より $(a) \subset (p_0)$ となる高さ 1 の素イデアル (p_0) が存在する. $a = a_1 p_0$ となる. 同様に $a_i \in A$ が単元になるまで $a_i = a_{i+1} p_i$ となる高さ 1 の素イデアル (p_i) を取る. この操作は有限回で終わる. 実際, 有限回で終わらないとすると $(a) \subsetneqq (a_1) \subsetneqq (a_2) \subsetneqq \cdots$ となりネーター性に矛盾する. よって a は有限個の素元と単元の積となり素元分解ができた. $\square$

定理 1 (Nagata の定理)**.** A をネーター整閉整域, $S \subset A$ を積閉集合とする. H は $\{[\mathfrak{p}]; \mathfrak{p} \in Ht1(A),\ \mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset\}$

で生成される $\mathrm{Cl}(A)$ の部分群とする．このとき，

$$\mathrm{Cl}(S^{-1}A) \simeq \mathrm{Cl}(A)/H.$$

証明. $\mathrm{Ht1}(S^{-1}A) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ht1}(A); \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ は局所化の素イデアルの対応から明らかである． よって，$\mathrm{Div}(A) \to \mathrm{Div}(A)/(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ht1}(A),\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset} \mathbb{Z}\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Div}(S^{-1}A)$ を得る． 同様に $\mathrm{P}(A) \to \mathrm{P}(A)/(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{P}(A),\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset} \mathbb{Z}\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{P}(S^{-1}A)$ を得る．この時次は可換である:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{P}(A),\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset} \mathbb{Z}\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}(S^{-1}A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Div}(A),\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset} \mathbb{Z}\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}(S^{-1}A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cl}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cl}(S^{-1}A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

□

系 1. A が UFD ならば $S^{-1}A$ も UFD, S が素元で生成されているとき, $S^{-1}A$ が UFD ならば A も UFD.

補題 1. $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ を重み付き次数付ネーター整閉整域とし, $\mathrm{Div_h}(A)$ を斉次因子イデアルにより生成された因子群の部分群で, $\mathrm{P_h}(A)$ を $\mathrm{Div_h}(A) \cap \mathrm{P}(A)$ とする．このとき方眼写像 $\mathrm{Div_h}(A) \to \mathrm{Div}(A)$ によって誘導される準同型 $\mathrm{Div_h}(A)/\mathrm{P_h}(A) \to \mathrm{Cl}(A)$ は全単射である.

証明. $A \neq A_0$ と仮定してよい． S を 0 でない非零因子のなす集合とする． このとき $S^{-1}A$ は斉次元 $a \in A$ と $s \in S$ に対して $\deg(a/s) = \deg a - \deg s$ で次数付環となる．L を $S^{-1}A$ の零次元全体, つまり $\{a/s \in S^{-1}A;$ 斉次元 $a \in A, s \in S$ で $\deg a = \deg s\}$ である．$t \in S^{-1}A$ を次数が正で最小であるとする．t は L 上超越的である．よって次数付環として $S^{-1}A \supset L[t, t^{-1}]$ となっている．これが等しいことを示す.

$u \in S^{-1}A$ を斉次元とする．$\deg u = q \deg t + r$ で $\deg t > r \geq 0$ となる整数 q, r が存在する．$r \neq 0$ なら $0 < r = \deg(ut^{-q}) < \deg t$ となり t の取り方に矛盾する．よって $r = 0$. したがって $ut^{-q} \in L$ となり, 任意の $S^{-1}A$ の元は $L[t, t^{-1}]$ の元である．よって $S^{-1}A$ は UFD である.

Nagata の定理より $\mathrm{Cl}(A)$ は S と交わらない高さ 1 の素イデアルで生成されることがわかる．高さ 1 の素イデアルで元に斉次元を持つものは斉次イデアルであるため斉次素イデアルで生成されることがわかる． □

定理 2. A を UFD とする． $A[X_1, \cdots, X_n]$ を X_i に重み $\omega_i > 0$ をつけて次数付環とみなす. $F(X_1, \cdots, X_n) \in A[X_1, \cdots, X_n]$ を既約斉重多項式とする． c を F の重さ ω と互いに素な正整数と

する．$B=A[X_1,\cdots,X_n,Z]/(Z^c-F(X_1,\cdots,X_n))=A[x_1,\cdots,x_n,z]$ とおく．ただし x_i,z を X_i,Z の像とする．このとき以下のどちらかの条件を満たすとき B は *UFD* である．

(a) $c\equiv 1\ (\mathrm{mod}\omega)$,

(b) 任意の有限生成射影加群は自由である．

証明．(a) を仮定する．$B/zB\simeq A[X_1,\cdots,X_n]/(F(X_1,\cdots,X_n))$ は整域であるため z は B で素元である．$c=1+d\omega$ とおき，$B[z^{-1}]$ において $x_i=z^{d\omega_i}x'_i$ とする．このとき $z^c=F(x_1,\cdots,x_n)=z^{c-1}F(x'_1,\cdots,x'_n)$ であるため $z=F(x'_1,\cdots,x'_n)$ を得る．よって $B[z^{-1}]=A[x'_1,\cdots,x'_n,F(x'_1,\cdots,x'_n)^{-1}]$ である．$x'_1,\cdots,x'_n$ は A 上代数的独立であるため，$B[z^{-1}]$ は UFD である．K を A の商体とすると $B=B[z^{-1}]\cap K[x_1,\cdots,x_n]^{K(z)}$ である．ここで $K[x_1,\cdots,x_n]^{K(z)}$ は $K(z)$ 上の $K[x_1,\cdots,x_n]$ の整閉包とする．実際 $f(x_1,\cdots,x_n,z)/z^r\in K[x_1,\cdots,x_n]^{K(z)}$ で $f(x_1,\cdots,x_n,z)\in B$ で $f(x_1,\cdots,x_n,0)\neq 0$ とする．このとき $z^rT-f(x_1,\cdots,x_n,z)$ の根なので $r>0$ なら整でない．よって $B=B[z^{-1}]\cap K[x_1,\cdots,x_n]^{K(z)}$ である．B も $K[x_1,\cdots,x_n,z]$ も整閉整域であるため B も整閉であるため Nagata の定理により B も UFD.

(b) を仮定する．ω は c と互いに素であるため，$ce\equiv 1 \bmod \omega$ となる整数 e が存在する．(a) より $B'=A[X_1,\cdots,X_n,U]/(U^{ce}-F(X_1,\cdots,X_n))$ は UFD. さらに $B'=B[u]/(u^e-z)$ を満たす．ここで B' は $1,u,\cdots,u^{e-1}$ を基底とする自由 B 加群である．よって B は B' と B の商体の共通部分であり，整閉整域である．また $B\to B'$ は忠実平坦である．今 X_i の重みを $ce\omega_i$, Z の重みを $e\omega$ とすると B は次数付環になる．同様に u に ω の重みをつけることで B' も次数付環になる．補題 1 により $\mathrm{Cl}(B),\mathrm{Cl}(B')$ は斉次イデアルの同値類で生成されている．したがって $\mathrm{Cl}B\to\mathrm{Cl}B'$ の核の元は B' が忠実平坦であることより，有限生成で可逆な斉次イデアル $\mathfrak{a}$ の同値類で表現される．A を B の剰余環とみなして $A\otimes_B\mathfrak{a}$ を考えると仮定より有限生成自由 A 加群となる．$f\colon B^r\to\mathfrak{a}$ の余核 $\mathrm{Cok}f$ は $(\mathrm{Cok}f)\otimes_B A=0$ となるが，次数付き中山の補題により $\mathrm{Cok}f=0$ を得る．よって f は全射．f は射影加群への全射であるため分裂する．よって $(\mathrm{Ker}f)\otimes_B A=\mathrm{Ker}(f\otimes_B A)=0$ となる．再び次数付き中山の補題により $\mathrm{Ker}f=0$ が得られる．よって f は全単射．よって $\mathfrak{a}$ は単項で $\mathrm{Cl}(B)\to\mathrm{Cl}(B')$ は単射．今 $\mathrm{Cl}(A)\to\mathrm{B}\to\mathrm{Cl}(B')$ が全単射であるため $\mathrm{Cl}(B)\to\mathrm{B}'$ は全射．よって $\mathrm{Cl}(A)\simeq\mathrm{Cl}(B)$ が得られた．今 A は UFD なので B も UFD である． □

この定理を用いて反例 Advent Clendar 2018 でザリスキ環の因子類群からそのザリスキ環の完備化の因子類群への準同型が全単射でない例, Math Advent Calendar 2018 の最終日に UFD 上の形式的冪級数環が UFD でない例を紹介しようと思います．

参考文献

[1] T.Y.LAM "Serre's Problem on Projective Modules", Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2006.

[2] Robert M. Fossum, "The Divisor Class Group of a Krull Domain", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, pringer-Verlag, 1973.

[3] P. Samuel, "Lectures on Unique Factorization Domains", Notes by M. Pavman Murthy, Tata Institute Of Fundamental Research, Bombay 1964.

[4] 後藤四郎, 渡辺敬一「可換環論」, 日本評論社, 2011.